Statistics and Application 统计学与应用**, 2018, 7(2), 241-246**
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2018.72028

Hans汉斯

The Optimal Retention of Insurance Products with Deductible

Yang Li*, Junhong Du, Lijun Wu#, Wei Liu

School of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: xjuly789@163.com, #xjmath@xju.edu.cn

Received: Apr. 3rd, 2018; accepted: Apr. 21st, 2018; published: Apr. 28th, 2018

Abstract

In order to find the optimal retention of insurance products with deductible under the stop-loss reinsurance treaty, first, under risk measures VaR and CTE, the paper introduces the optimal reinsurance model for the deductible loss of insurance products, and gives the optimal retention of the optimal reinsurance model. Then, it gives that each loss distribution obeys the exponential distribution, the specific form of the survival function for the total loss added to the deductible is given. Finally, the paper gives a specific numerical simulation.

Keywords

Insurance Products with Deductible, Stop Loss Reinsurance, Expect Premium Principle, VaR Risk Measure, CTE Risk Measure

具有免赔额保险产品的最优自留额

李　洋*，杜军红，吴黎军#，刘　伟

新疆大学，数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: xjuly789@163.com, #xjmath@xju.edu.cn

收稿日期：2018年4月3日；录用日期：2018年4月21日；发布日期：2018年4月28日

摘　要

为了寻找具有免赔额的保险产品在停止损失再保险协议下的最优自留额。首先，在风险度量VaR和CTE下文章介绍保险产品加入免赔额的损失的最优再保险模型，并且给出了最优再保险模型的最优自留额。

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 李洋, 杜军红, 吴黎军, 刘伟. 具有免赔额保险产品的最优自留额[J]. 统计学与应用, 2018, 7(2): 241-246.
DOI: 10.12677/sa.2018.72028

接着，在每次损失分布服从指数分布的情况下，给出了加入免赔额的总损失的生存函数的具体形式。最后，文章给出了具体的数值模拟。

关键词

具有免赔额的保险产品，停止损失再保险，期望保费原理，VaR风险度量，CTE风险度量

1. 引言

免赔额是免赔的额度，它具体指由保险人和被保险人事先约定，损失额在规定数额之内，被保险人自行承担损失，保险人不负责赔偿的额度。因为免赔额能消除许多小额索赔，损失理赔费用就大为减少，从而可以降低保险公司的经营成本，同时降低被保险人要缴纳的保费。因此，免赔额条款在财产、健康和汽车保险中得到广泛使用。再保险是一种风险管理方法，它可以转换保险人的风险到另一个保险承担者或为保险者提供一个减少自己承担的风险的机会。然而，保险者为了分摊它的风险理所应当需要向再保险者付一定的保险费。为了进行有效的风险管理和确保保险人的收入是稳定的，我们需要合理地处理保险人保留的风险和再保险保费之间的关系。再保险一般包括：停止损失再保险，比例再保险和分层再保险。保费原理包含：纯保费原理、最大损失原理、方差原理、期望值原理等被使用去得到合理的保费。文献[1]通过方差最小模型来研究再保险，在期望保费原理下，通过保险人自留风险的方差最小得到停止损失再保险是最优的。文献[2]研究了期望－效用模型最优再保险策略。文献[3]在考虑均值－方差保费原理下推广了文献[1]的结果。文献[4] [5] [6]等通过最小化破产概率来研究再保险策略。文献[7] [8] [9]在风险模型中首次引入风险度量 VaR 和 CTE。本文采用期望保费原理和停止损失再保险。我们知道：一方面，当自留额比较小时，保险人保留的风险较小，但是需要承担较高的保费；另一方面，如果保险者增加自留额，可以看出它虽然减少自己承担的再保险保费但是增加自己承担的风险。最近几年，VaR 和 CTE 风险度量不但在学术界引起足够的重视而且在实际中得到了广泛的应用，银行、证券公司、投资基金等金融机构进行投资风险度量与管理、资产配置、绩效评价等的重要工具(参考[10]和[11])。在 Cai，J 和 Tan，K.S [7]的基础上，本文得到了具有免赔额的保险产品的最优自留额，为保险公司进行再保险提供合理的理论支持。

2. 理论准备

Y 为保险公司在固定一段时间的总损失，则 Y 可以表达为：

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

其中 N 表示保险公司的总损失次数，Y_i 表示每一次的损失金额且为连续性随机变量。

Y_i 加入免赔额 u 后的损失用 X_i 表示，则加入免赔额后保险公司的总损失 X 可以表示为：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N^p},$$

其中 $X_{N^i} = \begin{cases} 0, & Y_i \le u \\ Y_i - u, & Y_i > u \end{cases} = (Y_i - u)_+$，$1 \le i \le N$。

假定 X 是非负的随机变量且它的生存函数为：

$$S_X(x)=\Pr\{X\ge x\}.$$

X_I 是保险公司自留的损失，X_R 是再保险公司承担的损失，则在停止损失再保险下 X 同 X_I 和 X_R 的关系为：

$$X_I=\begin{cases}X, & X\le d\\ d, & X>d\end{cases}=X\Lambda d \text{ 和 } X_R=\begin{cases}0, & X\le d\\ X-d, & X>d\end{cases}=(X-d)_+,$$

其中 d 为自留额且 $d>0$，$a\Lambda b=\min\{a,b\}$，$(a)_+=\max\{a,0\}$。

文章采用期望保费原理为：

$$\delta(d)=(1+\rho)E[X_R]=(1+\rho)E(X-d)_+,$$

其中 $p>0$ 为风险负载因子。

保险人承担的总风险我们用 T 表示，则 T 由两部分组成即保险人保留的损失和再保险保费，它相应的表达式为：

$$T=X_I+\delta(d). \tag{1}$$

定义 1： 自变量 X 在置信水平 $1-\alpha$ 下的 VaR 的定义为：

$$\mathrm{VaR}_X(\alpha)=\inf\{x:\Pr\{X>x\}\le\alpha\}. \tag{2}$$

基于上述 $\mathrm{VaR}_X(\alpha)$ 的定义，变量 X 在 $\mathrm{VaR}_X(\alpha)$ 下的条件尾部期望 CTE 被定义为：

$$\mathrm{CTE}_X(\alpha)=E\left[X\mid X\ge\mathrm{VaR}_X(\alpha)\right]. \tag{3}$$

文章选取的最优标准为：

$$\textbf{VaR 最优标准：}\ \mathrm{VaR}_T(d^*,\alpha)=\min_{d>0}\mathrm{VaR}_T(d,\alpha), \tag{4}$$

$$\textbf{CTE 最优标准：}\ \mathrm{CTE}_T(\tilde{d},\alpha)=\min_{d>0}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)。 \tag{5}$$

3. 定理和引理

上述最优模型(4)和(5)的最优再保险设计参考下面的引理 1。在本文中，记：$p^*=\dfrac{1}{1+p}$。

引理 1： i) 最优自留额 d^* 在(4)中存在当且仅当

$$\alpha<\rho^*<S_X(0) \text{ 且 } S_X^{-1}(\alpha)\ge(1+\rho)E[X];$$

ii) 如果最优自留额 d^* 在(4)中存在，则 $d^*=S_X^{-1}(\rho^*)$ 且 $\mathrm{VaR}_T(d^*,\alpha)=d^*+\delta(d^*)$；

iii) 最优自留额 $\tilde{d}$ 在(5)中存在当且仅当 $0<\alpha\le\rho^*<S_X(0)$；

iv) 如果最优自留额 $\tilde{d}$ 在(5)中存在，则 $\tilde{d}=S_X^{-1}(\rho^*)$ 且 $\mathrm{CTE}_T(\tilde{d},\alpha)=\tilde{d}+\delta(\tilde{d})$。

证明： 参考文献[7]的推论 2.1 和定理 3.1。

定理 1： 基础损失发生次数 N 的概率生成函数为 $P_N(z)=B[\theta(z-1)]$，这里 θ 为参数，B 是独立于 θ 的函数。个体的基础损失 Y_i 服从参数 μ 为指数分布，累积分布函数为 $F_{Y_i}(y)=1-\mathrm{e}^{-\mu y}(y\ge0)$。个体损失 Y_i 加入免赔额 u 后，N^P 表示加入限制条件后基于赔付的赔付次数，X_i 表示加入限制条件后每次的赔付金额，则在加入限制条件后总赔付额 X 和没有加入限制条件的总赔付额 Y 有相同形式的矩母函数，其中 Y_i

和 X_i 同分布，N^P 和 N 具有相同的分布形式，但θ要换成$\theta \mathrm{e}^{-\mu u}$。

证明：加入免赔额 u 后，v表示发生赔付的概率即：$v = 1 - F_{Y_i}(u) = \mathrm{e}^{-\mu u}$。

因为 $P_{N^P}(z) = P_N(1 - v + vz)$ 且 $P_N(z) = B[\theta(z-1)]$，则

$$P_{N^P}(z) = B[\theta(1 - v + vz - 1)] = B[\theta v(z-1)] = B[\theta \mathrm{e}^{-\mu u}(z-1)].$$

因为 $X_i = \begin{cases} 未定义, & Y_i \le u \\ Y_i - u, & Y_i > u \end{cases}$，则

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \Pr(X_i \le x \mid Y_i > u) = \Pr(Y_i - u \le x \mid Y_i > u) \\ &= \Pr(Y_i \le x + u \mid Y_i > u) = \frac{\Pr(u < Y_i \le x + u)}{\Pr(Y_i > u)} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mu(u+x)} - 1 + \mathrm{e}^{-\mu u}}{\mathrm{e}^{-\mu u}} = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x} \end{aligned}$$

总损失 Y 和 X 的矩母函数为：

$$M_Y(z) = P_N\left[M_{Y_i}(z)\right] 和 M_X(z) = P_{N^P}\left[M_{X_i}(z)\right]。 \tag{6}$$

通过 Y_i 与 X_i 的分布函数和 N^P 与 N 概率生成函数的对比，我们应用(6)得到加入限制条件下总赔付额和没有加入限制条件的总赔付额有相同形式的矩母函数。

引理 2 [12]：对整数α，有

$$\Gamma(\alpha; x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{x^j \mathrm{e}^{-x}}{j!}. \tag{7}$$

定理 2：任意损失程度独立同分布且服从均值为μ指数分布的复合模型 X 的生存函数为：

$$S_X(x) = \mathrm{e}^{-x/\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p_j} \frac{(x/\mu)^j}{j!}, \tag{8}$$

其中 $\widetilde{p_j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} p_n$, $j = 0,1,\cdots$, $x \ge 0$。

证明：n 个独立的服从均值为μ的指数函数的随机变量之和的矩母函数为：

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z) = (1 - \mu z)^{-n}.$$

上面的矩母函数很明显可以看出，那是 gamma 分布的矩母函数，对应的累积分布函数为：

$$F_X^{*n}(x) = \Gamma\left(n; \frac{x}{\mu}\right). \tag{9}$$

X 的生存函数为：

$$\begin{aligned} S_X(x) &= 1 - \Pr(X \le x) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P_n \Pr(X \le x \mid N = n), \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P_n F_{X_i}^{*n}(x) \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $F_X^{*0} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$ 且 $F_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X^{*k-1}(x-y)\mathrm{d}F_X(y), k = 1,2,\cdots$。

根据(7)，(9)和(10)式，则

$$S_X(x)=1-P_0-\sum_{n=1}^{\infty}P_n\Gamma\left(n,\frac{x}{\mu}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x/\mu)^j\mathrm{e}^{-x/\mu}}{j!}.$$

进而，改变求和顺序得：

$$S_X(x)=\mathrm{e}^{-x/\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x/\mu)^j}{j!}\sum_{n=j+1}^{\infty}P_n=\mathrm{e}^{-x/\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{P_j}\frac{(x/\mu)^j}{j!},$$

其中 $\widetilde{p_j}=\sum_{n=j+1}^{\infty}p_n,\ j=0,1,\cdots,x\ge 0$。

通过上面的定理 1 和定理 2，当保险产品的损失次数服从的概率生成函数为：$P_N=B\left[\theta(z-1)\right]$，每次损失金额 Y_i 独立同分布且服从均值 μ 的指数分布，则每次损失金额加入免赔额 u，保险公司在一段时间的总损失 X 的生存函数为：

$$S_X(x)=\mathrm{e}^{-x/\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{p_j}\frac{(x/\mu)^j}{j!},\tag{11}$$

其中：$\widetilde{p_j}=\sum_{n=j+1}^{\infty}p_n$，$p_n=\frac{\left(B\left(-\theta\mathrm{e}^{-\mu u}\right)\right)^{(n)}}{n!}$，$j=0,1,\cdots,x\ge 0$。

4. 数值模拟

假设保险公司的损失次数 N 服从参数为 $\beta=10\mathrm{e}$ 的 poisson 分布，N 的概率生成函数 $P_N(z)=B\left[\theta(z-1)\right]$ 对应的 $B(x)=\mathrm{e}^x,\theta=10\mathrm{e}$。每次损失金额 Y_i 服从指数分布 $F_{Y_i}(y)=1-\mathrm{e}^{-\mu y}$，其中参数为 $\mu=0.01$。保险人的风险承受能力 $\alpha=0.1$，再保险人的负载因子 $\rho=0.2$。在给保险产品的每次损失金额加入免赔额 $u=100$ 后，加入免赔额相应的损失次数 N^p 服从参数为 $\gamma=10$ 的 poisson 分布，N^P 的概率生成函数 $P_{N^P}(z)=B\left[\theta\mathrm{e}^{-\mu u}(z-1)\right]$ 对应的 $B(x)=\mathrm{e}^x,\theta\mathrm{e}^{-\mu u}=10$，加入免赔额的每次损失金额 X_i 服从分布 $F_{X_i}(x)=1-\mathrm{e}^{-\mu x}$，其中参数 $\mu=0.01$ 的指数分布。

通过上面我们知道：在免赔额 $u=100$ 下的保险产品的总损失 X 服从主分布为参数 $\gamma=10$ 的 possion 分布，次分布服从均值为 $\eta=1/\mu=100$ 的指数分布。通过(11)和上面的数值假设，我们有：

$E[X]=\gamma\eta=1000$，$S_X(0)=0.9999546$，$S_X^{-1}(\alpha)=S_X^{-1}(0.1)=1598.27$，$p^*=0.83$，$(1+p)E[X]=1200$.

通过上面的计算知：$0.1=\alpha<p^*=0.83<S_X(0)=0.9999546$

和 $S_X^{-1}(0.1)=1598.27>(1+p)E[X]=1200$。

利用引理 1，我们知 VaR 和 CTE 的最优自留额为：$S_X^{-1}\left(p^*\right)=569.54$。

5. 结论

基于风险度量 VaR 和 CTE，本文得到了具有免赔额的保险产品在停止损失再保险下的最优自留额。因为免赔额条款在健康、财产和汽车保险中广泛使用。因此，具有免赔额的保险产品在停止损失再保险下的最优自留额在实际中具有广泛应用的价值。文章使用期望保原理，VaR 和 CTE，这个方法可能被应用到较多的风险度量和保费原理中。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11361058)。

参考文献

[1] Borch, K. (1960) An Attempt to Determine the Optimum Amount of Stop Loss Reinsurance. *Transactions of the* 16*th International Congress of Actuaries*, Vol. I, 597-610.

[2] Arrow, K.J. (1965) Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care. *American Economic Review*, **55**, 154-158.

[3] Kaluszka, M. (2005) Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation. *Insurance Mathematics & Economics*, **36**, 375-398. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.02.004

[4] Kaluszka, M. (2005) Truncated Stop Loss as Optimal Reinsurance Agreement in One-Period Models. *Astin Bulletin*, **35**, 337-349. https://doi.org/10.1017/S0515036100014276

[5] Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. (1996) Reinsurance and Ruin. *Insurance Mathematics & Economics*, **19**, 61-80. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(96)00011-X

[6] Zhang, X., Zhou, M. and Guo, J. (2007) Optimal Combinational Quota-Share and Excess-of-Loss Reinsurance Policies in a Dynamic Setting: Research Articles. John Wiley and Sons Ltd.

[7] Cai, J. and Tan, K.S. (2007) Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures. *Astin Bulletin*, **37**, 93-112. https://doi.org/10.2143/AST.37.1.2020800

[8] Cai, J., Tan, K.S., Weng, C., *et al*. (2008) Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures. *Insurance Mathematics & Economics*, **43**, 185-196. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.011

[9] Chi, Y. and Tan, K.S. (2011) Optimal Reinsurance under VaR and CVaR Risk Measures: A Simplified Approach. *Astin Bulletin*, **41**, 487-509.

[10] Cai, J. and Li, H. (2005) Conditional Tail Expectations for Multivariate Phase-Type Distributions. *Journal of Applied Probability*, **42**, 810-825. https://doi.org/10.1239/jap/1127322029

[11] Jorion, P. (2000) Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. 2nd Edition, Mcgraw-Hill.

[12] Stuart, A.K., Harry, H.P. and Gordon, E.W. 损失模型: 从数据到决策[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.